III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática

Universidade Federal de Goiânia

6 a 10 de novembro de 2006

Calques3D: Um Software de Geometria Dinâmica Espacial Gratuito

Humberto José Bortolossi
Departamento de Matemática Aplicada, UFF
(hjbortol@vm.uff.br)

Claudia Santos Bastos
Aluna do Curso de Especialização em Matemática, UFF
(clsbastos@gmail.com)

26 de novembro de 2006

Resumo

Nosso minicurso tem como objetivo principal divulgar para a comunidade matemática brasileira o "Calques3D", um software de geometria dinâmica tridimensional *gratuito*. Com interface simples e amigável, traduzido para o português, o Calques3D se apresenta como uma excelente ferramenta para ensino/aprendizagem da geometria espacial. O minicurso visa promover um primeiro contato do participante com o software, através de tutoriais na forma de filmes intercalados com atividades de construção, visualização e exploração de objetos tridimensionais.

1 Motivação

No ensino da geometria espacial, constata-se que tanto alunos quanto professores enfrentam dificuldades na construção e na interpretação de representações bidimensionais de figuras tridimensionais [1]. O uso de material concreto mostrou ser uma ferramenta pedagógica importante e eficaz para se tentar resolver estas dificuldades [1], contudo, existem certas configurações e propriedades geométricas que são difíceis de se representar concretamente, devido a limitações de ordem técnica[1]. Aliado ao fascínio que o computador

[1]Considere, por exemplo, o problema de visualizar o seguinte teorema: dadas duas retas transversas r_1 e r_2 que não se cruzam, sempre existem planos π_1 e π_2 que são paralelos, com π_1 contendo r_1 e π_2 contendo r_2.

exerce sobre os alunos, o uso de ferramentas computacionais se põe como uma alternativa promissora no ensino da geometria espacial.

Enquanto que os aspectos teóricos, práticos e pedagógicos dos softwares de geometria dinâmica bidimensionais são amplamente abordados e discutidos [2], somente recentemente softwares de geometria dinâmica tridimensionais começaram a aparecer. Neste minicurso, estudaremos o Calques3D [3], um excelente e gratuito software de geometria dinâmica tridimensional. O desenvolvimento das atividades se dará através de tutoriais na forma de filmes e de material impresso, que serão distribuídos para os participantes em CD-ROMs individualizados. Este material também estará disponível no endereço http://www.professores.uff.br/hjbortol/calques3d/.

2 Recursos do Software

No momento, o programa está disponível apenas para a plataforma Microsoft Windows©. Como seus irmãos bidimensionais, o Calques3D oferece um conjunto de ferramentas para a construção de objetos (tridimensionais): pontos, retas, planos, círculos, polígonos, cubos, cilindros e esferas. Além disso, é possível marcar (construir) a interseção entre vários destes objetos e fazer construções que envolvam perpendicularidade e paralelismo, tudo dentro de uma interface simples e amigável (Figura 1).

Uma vez construída a figura, é possível mudar o ângulo de visão e configurar o sistema de referência: eixos, solo e paredes (Figura 2). Estes recursos ajudam o aluno a ter uma melhor percepção tridimensional do objeto, ao mesmo tempo em que estabelece um elo intermediário entre uma representação bidimensional (como a que é feita em livros) e o modelo concreto.

Os passos (hierarquia) da construção podem ser acompanhados de dois modos: através de uma janela que possui o histórico da construção, ou de uma janela que descreve uma árvore de dependência dos objetos (Figura 3). Com estes recursos, o usuário pode analisar as idéias subjacentes a construção e identificar os passos necessários para reconstruir a figura na tela.

Um recurso muito interessante e útil é a janela *MathPad*, que permite exibir as coordenadas e equações cartesianas de pontos, retas, planos e esferas. Com isto, é muito fácil criar atividades que explorem as características analíticas (algébricas) de construções tridimensionais (Figura 4). Outros recursos do software incluem animações, macros e rastros de objetos.

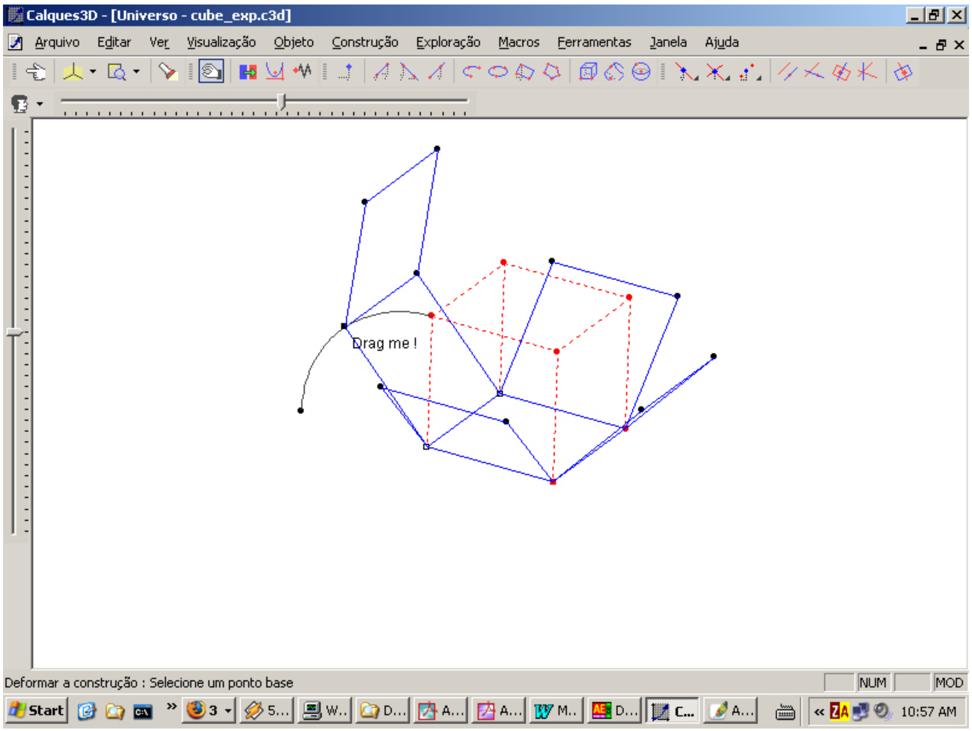

Figura 1: Interface gráfica do Calques3D.

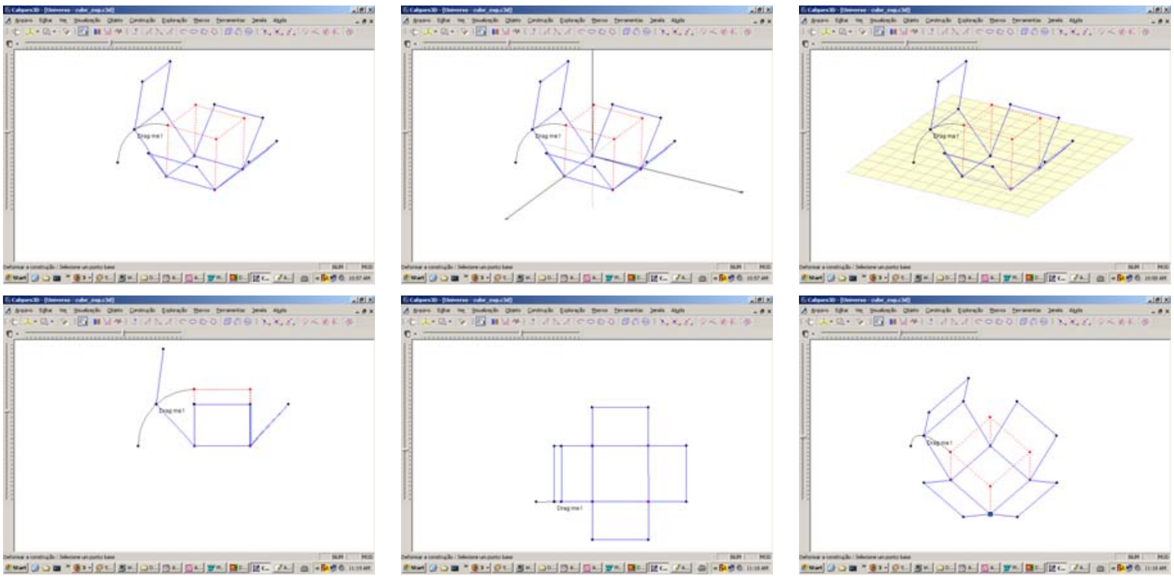

Figura 2: Diferentes referenciais e pontos de vista.

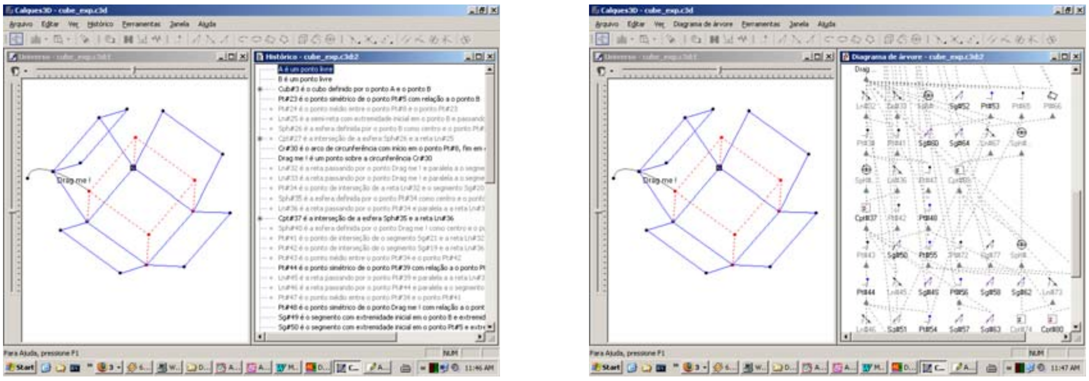

Figura 3: Visualizando a hierarquia de uma construção.

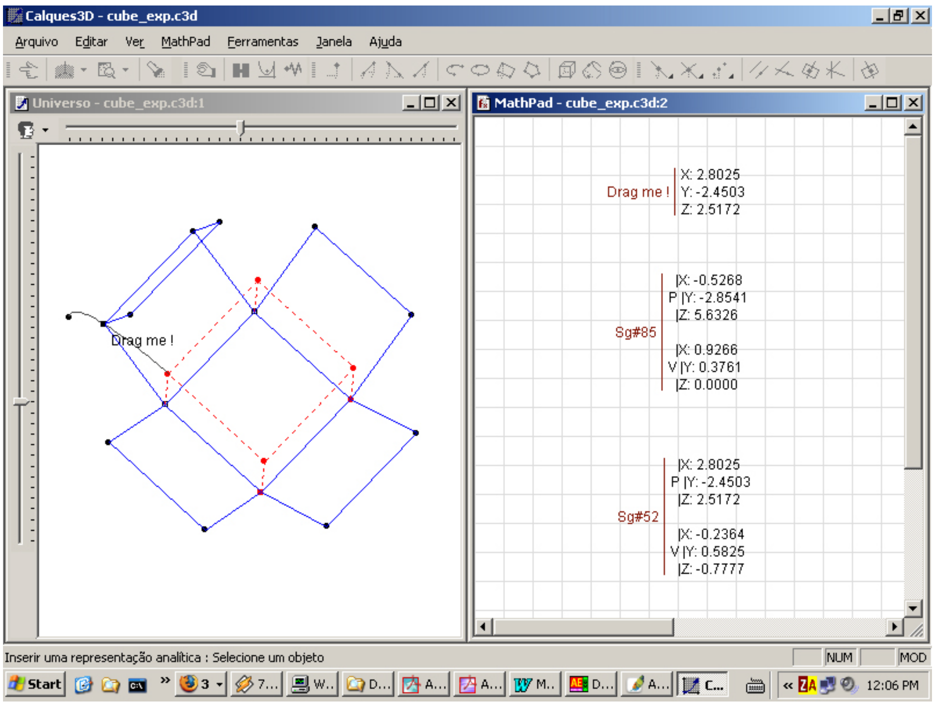

Figura 4: Exibindo coordenadas e equações cartesianas no Calques 3D.

Atividades Básicas

Atividade 1

Assista aos tutoriais do Calques3D disponíveis no CD-ROM. Eles trarão noções básicas da interface do programa, mostrando:

(a) como identificar as principais áreas do Calques3D,

(b) como conhecer algumas das ferramentas básicas e dominar as propriedades de visualização e

(c) como desenhar, mover e apagar pontos livres.

Após cada um dos 4 tutoriais, tente reproduzir numa janela vazia do Calques3D os procedimentos observados.

Atividade 2

Abra o arquivo tetraedro-qualquer.c3d. Com isso, uma janela do Calques3D se abrirá com os pontos livres marcados no Tutorial 3. Esses pontos serão os vértices de um tetraedro, que você deverá construir agora.

Passo 1. Na barra de ferramentas, selecione a ferramenta *segmento* e, então, clique nos dois pontos que serão os extremos desse segmento.

Passo 2. Repita a operação com os outros pontos, até formar um tetraedro com todas as suas arestas.

Passo 3. Usando os botões de rolagem lateral, gire a figura para visualizar o tetraedro de vários ângulos diferentes.

Passo 4. Selecionando a ferramenta *mover*, desloque o vértice superior para os lados, para cima e para baixo. Note que o tetraedro se deforma de acordo.

Passo 5. Através do ícone, altere o sistema de referência, passando para *solo*, depois para *eixos*, em seguida para *nenhum*, e por último retornando para *paredes*.

Passo 6. Apague o ponto relativo ao vértice superior (você vai precisar selecionar a tarefa *suprimir*) no item *objeto* do menu principal. Veja o que acontece.

Passo 7. Reconstrua o tetraedro.

Atenção: não apague ou feche esta construção, pois ela será usada mais adiante!

Atividade 3

Vamos tentar investigar se, como no caso do triângulo, as medianas do tetraedro se cruzam num mesmo ponto (entende-se por mediana de um tetraedro como o segmento que vai de um vértice do tetraedro ao baricentro da face oposta a esse vértice). Aproveitando a construção anterior, vamos traçar as medianas das faces do tetraedro.

Passo 1. Vamos começar com uma das faces. Selecione a ferramenta *ponto médio* na barra de ferramentas do programa e, em seguida, clique em dois vértices do tetraedro para construir o ponto médio da aresta correspondente. Observe que, ao tentar selecionar um ponto, uma janela com um aviso de ambigüidade poderá se abrir. Nessa janela você deverá selecionar o objeto que deseja manipular.

Passo 2. Repita a operação em outra aresta da mesma face do tetraedro.

Passo 3. Com a ferramenta *segmento* , ligue cada vértice ao respectivo ponto médio do lado oposto.

Agora já podemos marcar o baricentro dessa face. Da teoria de geometria euclidiana plana, sabemos que as três medianas desta face se cruzam em ponto. Mas para efeito de construção, vamos precisar explicitar essa interseção. Os passos seguintes ensinam como fazer isto.

Passo 4. Vá ao *menu principal* e clique no item *construção*. Em seguida, selecione a opção *interseção* (onde podemos escolher os vários tipos de objetos para os quais é possível construir interseções). No submenu que irá aparecer, clique em *reta-reta*, que é o que nos interessa.

Passo 5. Voltando à construção, clique nas retas para as quais queremos calcular a interseção (no nosso caso, as medianas da face). Veja que a interseção ficou marcada por um ponto visível.

Passo 6. Repita o processo nas outras faces. Se necessário, modifique o ângulo de visão para obter uma melhor visualização da face com a qual você vai trabalhar (use as barras de rotação).

Repare que a construção ficou visualmente poluída, carregada de informações agora desnecessárias. Vamos promover uma “limpeza”.

Quando clicamos duas vezes sobre um objeto, uma janela com as propriedades desse objeto se abre (no caso de haver ambigüidade, deve-se selecionar o objeto desejado e, em seguida, clicar duas vezes sobre ele novamente). Nessa janela podemos alterar a cor, a forma, dar nomes e, também, ocultar o objeto. Temos ainda informações sobre sua definição e os objetos que dele dependem.

Para promover essa “limpeza” (isto é, esconder as medianas das faces), faça como se segue.

Passo 7. Em primeiro lugar, neutralize o apontador do mouse. Para isso selecione a ferramenta *tarefa padrão* .

Passo 8. Escolha uma das faces pra iniciar o trabalho. Clique duas vezes sobre uma das medianas e marque a opção *ocultar*. Repita a operação na outra mediana.

Passo 9. Continue o processo de “limpeza” nas medianas das outras faces. É importante ter em mente que os objetos só estão ocultos (invisíveis), suas propriedades e pontos dependentes se mantêm.

Passo 10. Para deixar a construção ainda mais “limpa”, oculte também os pontos médios marcados nas arestas.

Veja que agora só os baricentros das faces laterais ficaram visíveis. É com eles que vamos tentar encontrar o baricentro do tetraedro. Nessa etapa, procure sempre girar os eixos, buscando um melhor ângulo de visão. Uma visão particular de um ambiente tridimensional pode produzir ilusões de ótica e, com isto, você pode acabar criando segmentos que você não quer.

Passo 11. Selecione a ferramenta *segmento*  na barra de ferramentas e, então, ligue cada vértice ao baricentro da face oposta a este.

Passo 12. Construa a interseção destes segmentos (o baricentro do tetraedro) usando, para isto, a ferramenta *construção* → *interseção* → *reta-reta* no menu principal,

Para facilitar a atividade seguinte, vamos organizar melhor a construção, nomeando pontos importantes: os 4 vértices, os baricentros das faces e o baricentro do tetraedro.

Passo 13. Dê um duplo clique num dos vértices (se aparecer ambigüidade, selecione o ponto desejado e, em seguida, dê novamente um duplo clique sobre ele). Na janela que se abrirá com as propriedades do objeto, mude o nome. Sugestão: use as letras A, B, C e D para os vértices,e A', B', C' e D' para os baricentros das faces do tetraedro e G para o baricentro do tetraedro.

Atenção: não apague ou feche esta construção, pois ela será usada mais adiante!

Atividade 4

Quando ocultamos um objeto na janela da área de trabalho, não é mais possível localizá-lo nessa janela, pois ele está invisível. Para localizá-lo, precisamos ir para o ambiente *histórico*, que se abrirá em outra janela independente.

Passo 1. Clique no item *ver* do menu principal e, em seguida, em *histórico*.

Você terá então duas janelas ativas. Se quiser, organize-as com as opções disponíveis no item *janela* do menu principal. Se sua construção estiver ocupando muito espaço, use a ferramenta *zoom*  e diminua seu tamanho.

Na lista que aparece na janela do histórico, o que está escrito em preto é o que temos de visível na construção e o que está em cinza é o que foi ocultado. Observamos ainda que os objetos são numerados de acordo com a ordem em que vão sendo construídos.

Passo 2. Na janela do *histórico*, clique duas vezes sobre um dos objetos ocultos da lista. Uma janela aparecerá. Nela, desmarque a opção *oculto* para deixar o objeto visível novamente.

Passo 3. Oculte novamente esse objeto e, em seguida, feche a janela do histórico.

Atenção: não apague ou feche esta construção, pois ela será usada mais adiante!

Atividade 5

O objetivo desta atividade é praticar o uso da janela *MathPad* do Calques3D, que dá acesso aos recursos de geometria analítica do programa. Sabemos, da teoria de geometria euclidiana plana, que as medianas de um triângulo sempre se cruzam em um ponto, que divide cada mediana na proporção 2 para 1. Será que existe alguma relação análoga para o baricentro do tetraedro? Vamos usar a janela *MathPad* para investigar e procurar uma resposta.

Passo 1. Selecione a janela *universo*. No menu principal, clique no item *exploração* e, em seguida, selecione a opção *medida*.

Passo 2. Na janela da sua construção, clique nas extremidades de uma das medianas cujo comprimento iremos medir.

Observe que na janela *MathPad* apareceu o comprimento do segmento selecionado. Como todas as informações que entram no *MathPad* surgem no mesmo lugar, procure sempre deslocá-las para que não fiquem umas sobre as outras (clique e arraste).

Passo 3. Clique agora no baricentro e no vértice do baricentro correspondente à mediana que você escolheu no passo anterior. A medida deste segmento também aparecerá na janela *MathPad*.

Passo 4. Dê um clique duplo no maior dos comprimentos calculados pelo *MathPad* (o comprimento da mediana). Uma janela aparecerá. No campo *variable* use alguma palavra para referenciar a variável (usaremos a letra d). Repita a operação para referenciar o outro comprimento (usaremos *l*). Cuidado:não use letras acompanhadas de outros caracteres, como d', pois o *MathPad* não efetua cálculos envolvendo variáveis referenciadas desta maneira.

Passo 5. Ainda na janela do *MathPad*, vá ao menu principal e clique no item *MathPad* e, então, escolha a opção *inserir expressão*.

Passo 6. Vai aparecer na tela do *MathPad* a equação $1 + 1 = 2.000$. Clique duas vezes sobre esta equação e, no campo *variable*, dê um nome para referenciá-la (usaremos x).

Passo 7. Em *definition*, use a expressão d/3 (que é igual ao comprimento da mediana dividido por 3). O que você observa? Tente agora dividir o comprimento da mediana por 4. O que você observa?

Passo 8. Repita essas operações para todas as medianas do tetraedro.

Na janela *MathPad* podemos ainda escrever textos auxiliares. Para isso, usamos a ferramenta *incluir comentário* no item *MathPad* do menu principal.

Atividade 6

Nesta atividade você irá construir interseções de um tetraedro com um plano perpendicular a uma das medianas do tetraedro. Durante o processo, novas ferramentas serão apresentadas. Entre elas a *animação*, com a qual os objetos da construção podem se movimentar sozinhos.

Passo 1. Volte ao tetraedro construído na Atividade 3. Para começar, "limpe" sua construção deixando somente uma das medianas do tetraedro visível. Se você já o apagou, construa-o novamente (bastam os vértices e as arestas).

Passo 2. Vá ao Menu Principal, selecione *construção* e, em seguida, clique em *point on*.

Essa ferramenta permite criar pontos sobre os objetos da construção. Esses pontos são semi-livres: eles só podem ser movidos sobre o objeto no qual foi sobreposto.

Passo 3. No submenu de *point on*, escolha a opção *reta*. Clique então na mediana do tetraedro que ficou visível para construir um ponto sobre o segmento correspondente.

Passo 4. Selecione a ferramenta *plano perpendicular* . Clique então na mediana e, em seguida, no ponto sobre o segmento que você construiu no passo anterior.

Passo 5. Devemos agora construir as interseções do plano com cada uma das arestas do tetraedro. Para isto, basta usar a ferramenta *construção → interseção → reta-plano* no menu principal. Após ativá-la, clique no ponto e, depois, em uma das arestas do tetraedro. Repita o processo para as outras arestas.

Passo 6. Selecione a ferramenta *polígono convexo*  e, então, clique nos pontos de interseção até fechar o polígono. No total são 4 cliques, pois o último ponto deve coincidir com o primeiro.

Passo 7. Se você mover o ponto sobre a mediana (com a ferramenta ), a interseção do plano com o tetraedro se ajustará de acordo. Este processo pode ser animado com a ferramenta *animação* . Após ativá-la, clique no ponto que você construiu sobre a mediana.

Para acelerar a animação, clique em qualquer lugar da *área de trabalho* e, para parar, selecione a *tarefa padrão* .

Atividades Intermediárias

Atividade 7

Em geometria plana, o teorema de Varignon afirma que os pontos médios de um quadrilátero qualquer *sempre* formam um paralelogramo. O teorema de Varignon continua valendo se os vértices do "quadrilátero" não estiverem em um mesmo plano? Investigue!

Atividade 8

(a) No plano, qual é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes a dois pontos distintos dados? E no espaço?

(b) No plano, qual é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes a três pontos não-colineares dados? E no espaço?

(c) Qual é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes a quatro pontos não-coplanares dados?

(d) Qual é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes a um plano e a um ponto fora do plano?

Implemente cada um destes lugares geométricos no Calques3D! No item (d), use a ferramenta  para visualizar o lugar geométrico.

Atividade 9

Em geometria plana, as alturas de um triângulo *sempre* são concorrente em um ponto (o ortocentro do triângulo). E as alturas de um tetraedro? Sempre se encontram em um mesmo ponto? Investigue com o Calques3D!

Atividade 10

Dados dois pontos distintos, construa um tetraedro regular cuja uma das arestas é determinada por estes dois pontos.

Atividade 11

Dados dois pontos distintos, construa um cubo cuja uma das arestas é determinada por estes dois pontos.

Atividades Avançadas

Atividade 12

Dadas duas retas reversas r_1 e r_2, construa no Calques3D dois planos π_1 e π_2 tais que π_1 é paralelo a π_2, π_1 contém a reta r_1 e π_2 contém a reta r_2.

Atividade 13

Dados 3 pontos distintos A, B e C, construa no Calques3D a esfera de centro em C e raio igual a distância entre A e B, isto é, construa o equivalente tridimensional do compasso no plano.

Atividade 14

Use o Calques3D para ilustrar a projeção estereográfica (Figura 5). Qual é a imagem, pela projeção estereográfica, de círculos desenhados sobre a esfera?

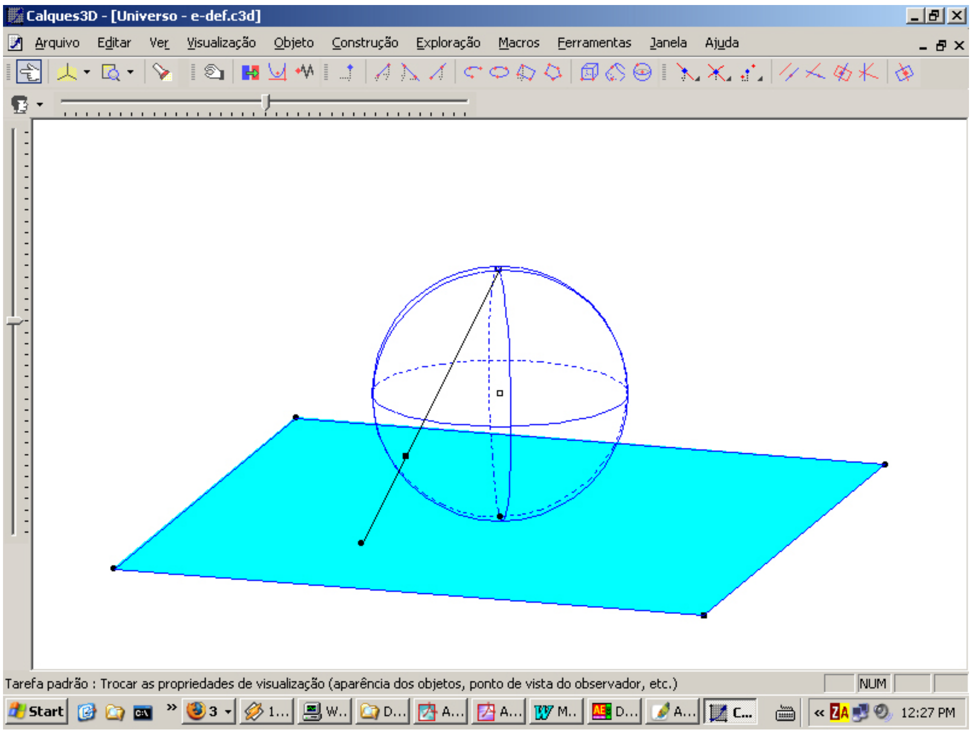

Figura 5: A projeção estereográfica.

Atividade 15

Implemente no Calques3D uma construção que ilustra o fato do hiperbolóide de uma folha ser uma superfície regrada (Figura 6).

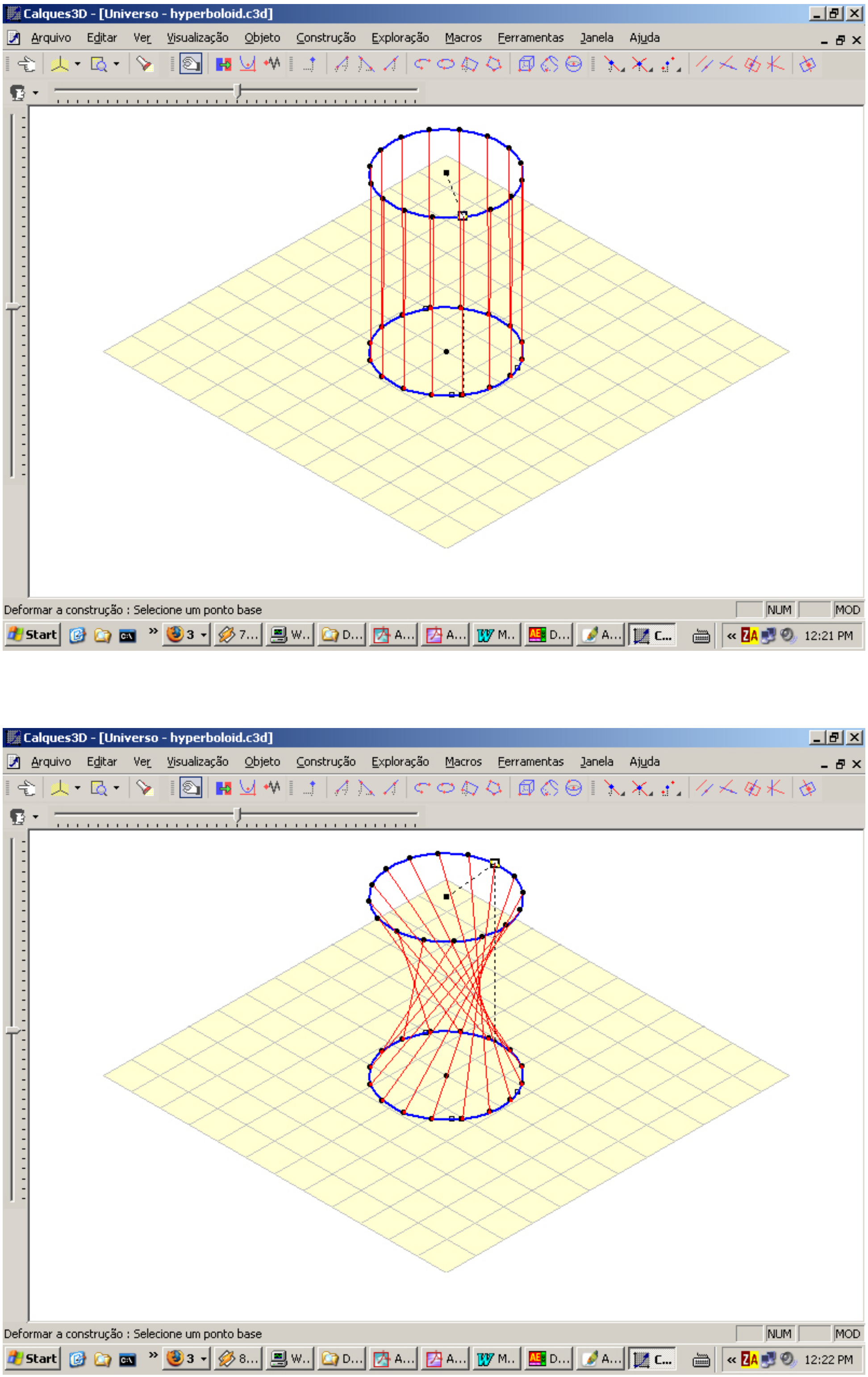

Figura 6: O hiperbolóide elíptico de uma folha como uma superfície regrada.

Referências

[1] A. M. M. R. Kallef, *Vendo e Entendendo Poliedros: do Desenho ao Cálculo do Volume Através de Quebra-Cabeças Geométricos e Outros Materiais Concretos*. Segunda Edição. Editora da Universidade Federal Fluminense, 2003.

[2] J. King e D. Schattschneider, *Geometry Turned On: Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research*. The Mathematical Association of America, 1997.

[3] N. van Labeke, *Prise en Compte de l'Usager Enseignant dans la Conception des EIAO. Illustration dans Calques 3D*. Tese de doutorado, LORIA, Universidade Henri Poincaré, 1999.